TP1 : Le spectre et la FFT.

Fabien PIERRE
fabien.pierre@math.u-bordeaux1.fr
http://sites.google.com/site/fabienpierre/enseignements

Automne 2013.

Nous étudierons dans ce TP quelques éléments sur le spectre d'un signal.

1 Spectre d'un signal.

On prendra dans la suite pour convention que 1 représente 1 seconde (s) et on donnera les fréquences en Hertz ($Hz = s^{-1}$).

- Créer un signal représentant la fonction (continue) $t \mapsto \sin(2\pi t)$ échantillonnée pendant 3 secondes à la fréquence d'échantillonnage de $10Hz$. Afficher-le.
- Tracer la transformée de Fourier discrète de ce signal. Quel problème apparaît ? Tracer la densité spectrale d'énergie. Où sont représentées les basses fréquences ? Les hautes fréquences ?
- Le spectre se représente avec les hautes fréquences aux bords. Utiliser `fftshift` pour remettre les fréquences dans cet ordre. Donner la fréquence de la sinosoïde.
- Ajouter à la sinusoïde la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}\sin(4\pi t)$, observer cette fonction somme ainsi que son spectre. Commenter. Identifier les pics et les mettre en relation avec chacune des sinusoïdes.
- Télécharger la fonction `Makesignal` sur `http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/1138-simuwave/content/AllSimuwave/SimuWave/MakeSignal.m`. Et tester la FFT sur des fonctions telles que Piece-Regular. On verra ultérieurement comment bien analyser spectralement de tels signaux.

2 Calcul de quelques spectres courants et formule d'inversion.

- Soit f une fonction stable, réelle et impaire, montrer que son spectre est réel et symétrique (i.e. c'est une fonction paire.).
- Soit $a < b$ et
$$\pi_{a,b}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que $\pi_{a,b}(t)$ constitue un signal stable. Calculer son spectre. Montrer qu'il n'est pas stable. Montrer qu'il est d'énergie finie.
- Montrer que le signal défini par
$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ e^{-t}/\sqrt{t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$
est stable mais pas d'énergie finie.
- Soit δ_0 la distribution telle que $\int_{\mathbb{R}} \delta_0 f(t) = f(0)$, pour toute fonction continue f. À l'aide de la formule d'inversion donner le spectre de la fonction $\sin(t)$.

– Soit $a > 0$. Calculer l'inverse de la prise de spectre pour le spectre donné par $f \mapsto \pi a e^{-2\pi a|f|}$. Déduire, à l'aide de la formule d'inversion le spectre de $\dfrac{1}{1+t^2/a^2}$.
– Soit x un signal stable. Soit $x(a.$ la fonction $t \mapsto x(at)$ (dilatation ou contraction de la fonction x). Montrer que spectre$[x(a.](f) = \dfrac{1}{a}$ spectre$[x](\dfrac{f}{a})$.
– Sous les mêmes hypothèses montrer que

$$\forall \tau \in \mathbb{R} \ , \forall f \in \mathbb{R} \ , \ \text{spectre}[x(. + \tau)] = e^{2j\pi f\tau} \, \text{spectre}[x](f).$$

– Sous les mêmes hypothèses montrer que

$$\forall f_0 \in \mathbb{R} \ , \forall f \in \mathbb{R} \ , \ \text{spectre}[e^{2j\pi f_0 \cdot} x(.)](f) = \text{spectre}[x](f - f_0).$$

– Soit $g_{0,\sigma^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{t^2}{2\sigma^2}}$ la densité de la loi normale. Calculer son spectre. Donner un vecteur propre pour la transformée de Fourier.
– En approximant les fonctions stables par un vecteur ainsi que leurs spectres, illustrer chacun des points précédents à l'aide de `Matlab`, grâce aux commandes `fft` et `ifft`.

3 Les fréquences d'échantillonnage et Shannon.

– On veut tracer la fonction $t \mapsto \sin(t2\pi F)$. Selon le théorème de Shannon, à quelle fréquence minimale ce signal doit être échantillonné ? On tracera par exemple cette fonction pendant 10 secondes à une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz, et avec $F = 1$.
– Tracer son spectre avec les hautes fréquences aux bords. Placer en abscisse l'échelle des fréquences.
– Comment se traduit sur le spectre, le fait d'avoir un échantillonnage plus long ? Quel principe est alors illustré ici ?
– Diminuer progressivement la fréquence d'échantillonnage en conservant toujours une bonne échelle des fréquences. Lire, au fur et à mesure de la diminution de fréquence d'échantillonnage, la position du pic de fréquence.
– Observer également (avec `plot`) l'allure de la fonction obtenue. Ce phénomène s'appelle un repliement de spectre.

4 Fréquence pure en 2D.

– Tracer sur le pavé $[-3, 3] \times [-3, 3]$, avec une résolution de 0.005, la fonction $(x, y) \mapsto \sin(2\pi F x)$ pour $F = 1$. Tracer également $(x, y) \mapsto \sin(2\pi F y)$
– Afficher le spectre 2-D de l'image (fonction `fft2`), il faut prendre soin de réajuster l'échelle : afficher $\log(1 + |DFT(I)|)$, où I représente l'image.
– Afficher également la fonction pour plusieurs valeurs de F ainsi que la DFT associée
– Sous échantillonnée une de ces fonction, avec divers facteurs et interpréter les changement au niveau de la DFT.
– Afficher une de ces fonctions avec $F = 30$ afficher la et afficher son spectre. Sous-échantillonner avec un facteur 13, affiche le résultat et afficher sa DFT.

5 Repliement de spectre en traitement d'image.

– Charger l'image 'barbara.png' fournie par l'enseignant ou dans l'archive disponible sur `http://sites.google.com/site/fabienpierre/enseignements`
– Pour afficher le spectre 2-D de l'image en prenant soin de réajuster l'échelle : afficher $\log(1 + |DFT(I)|)$, où I représente l'image. Afficher le spectre de Lena et Barbara. Comparer, commenter.

- Identifier les zone de hautes fréquences et de basses fréquences. En général, on représente la transformée de Fourier d'image avec les basses fréquences au centre. Utiliser la commande `fftshift` afin de rétablir cela.
- Décimer l'image Lena et Barbara et afficher les deux résultats (NB afficher en grand écran pour visualiser convenablement les effets de moirés.) Commenter.
- Afficher les DFT des deux images décimées. Commenter.
- Sous-échantillonner l'image Barbara avec une facteur 3, 4, etc, et observer les effets de moiré.

6 Repliement de spectre (temporel) en traitement de video.

- Charger le fichier `sequence_rotation.mat` (commande `load`).
- Afficher la vidéo avec `implay`.
- Sous-échantillonner la vidéo en temps avec un facteur, 2, 4 et 19, et observer à chaque fois l'effet de ce sous-échantillonnage. Commenter en voyant une analogie (pour le facteur 19) avec le signe que l'on avait obtenu devant $-Fe/2$ lors de l'affichage de l'échelle des spectres.

7 Théorème de Shannon et phénomène de Gibbs.

- Soit x la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ Tracer cette fonction sur $[-1,1]$ avec une fréquence d'échantillonnage de $Fe = 10Hz$. Donner la résolution temporelle Te.
- Tracer son spectre. Quelle fonction pouvez-vous reconnaitre ? Augmenter la taille du spectre d'un facteur 4 en ajoutant des zéros au niveau des hautes fréquences (zéro-padding). Retrouver la fonction correspondante (fonction `ifft`). Refaire la même manipulation avec la fonction `piece−regular` mentionnée en Section 2.
- Tracer son interpolée de Shannon avec une résolution de 0.025, i.e. la fonction définie par
  $$t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n.Te)\,\mathrm{sinc}(Fe(t-t_n)) \ ,$$
  avec $t_n = n.Te$. Commenter.
  Rappel : $\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{sinon.} \end{cases}$